Université Pierre et Marie Curie

NP215 - Processus stochastiques

Année Universitaire 2011 – 2012

Examen

I - Télégraphe aléatoire

On considère un processus stochastique, dit télégraphe aléatoire, portant sur la variable aléatoire discrète n pouvant prendre les deux valeurs $\{-1, +1\}$. On donne les probabilités conditionnelles du processus :

$$P(n_2, t_2|n_1, t_1) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2\gamma(t_2-t_1)})\,\delta_{n_1,n_2} + \frac{1}{2}(1 - e^{-2\gamma(t_2-t_1)})\,\delta_{n_1,-n_2} \tag{1}$$

où n_1 et n_2 représentent les deux états possibles $\{-1, +1\}$ du système.

a) Interpréter les deux termes de l'expression (1).

b) Vérifier que la probabilité conditionnelle (1) est normalisée.

c) Montrer que $P(n_2, t_2|n_1, t_1)$ obéit à l'équation de Chapman-Kolmogorov.

d) Ecrire les équations maîtresses associées au processus et portant sur les probabilités $p(n = 1, t)$ et $p(n = -1, t)$, que l'on pourra noter $p_1(t)$ et $p_{-1}(t)$.

e) Intégrer les équations maîtresses et en déduire les probabilités $p(n = 1, t)$ et $p(n = -1, t)$. On prendra comme condition initiale $p(n = 1, t = 0) = 1$. Donner alors l'expression générale de $p(n, t)$.

f) Montrer que la probabilité $p(n, t)$ est compatible avec la probabilité conditionnelle $P(n_2, t_2|n_1, t_1)$.

II - Particule dans un potentiel harmonique

On considère une particule plongée dans un potentiel *quelconque* $U(x)$. L'équation stochastique associée s'écrit :

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -m\gamma\frac{dx(t)}{dt} - \frac{dU(x)}{dx} + m\Gamma(t) \tag{2}$$

où γ est le coefficient d'amortissement ou de *viscosité* et $m\Gamma(t)$ une force aléatoire définie par :

$$\langle\Gamma(t)\rangle = 0 \qquad \langle\Gamma(t)\Gamma(t')\rangle = 2D\delta(t - t')\ . \tag{3}$$

I - Introduction

a) Donner la signification physique des relations données dans l'équation (3). Quelle est leur importance dans le cadre de l'étude des phénomènes stochastiques ?

b) Définir le régime *visqueux* de l'équation (2). En déduire une équation portant sur la variable $x(t)$ et associée à ce régime.

c) Donner l'expression *générale* de l'équation de Fokker-Planck et des coefficients $a_1(x,t)$ et $a_2(x,t)$ qui interviennent dans cette équation.

d) *Déduire* de l'équation obtenue au b) que l'équation de Fokker-Planck pour la probabilité de présence $p(x,t)$ d'une particule plongée dans un potentiel unidimensionnel $U(x)$, dans le régime visqueux, est donnée par :

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{m\gamma}\frac{dU(x)}{dx}p(x,t) + \frac{D}{\gamma^2}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}\right). \tag{4}$$

II- Potentiel harmonique

On considère maintenant le cas d'un potentiel harmonique $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$. On donne la condition initiale : $p(x, t = 0) = \delta(x - x_0)$.

a) Montrer que la valeur moyenne $\langle x^n\rangle(t)$ notée $\langle x(t)^n\rangle$:

$$\langle x(t)^n\rangle = \int dx\ x^n\ p(x,t)$$

obéit à l'équation :

$$\frac{d}{dt}\langle x(t)^n\rangle = -\frac{k}{\gamma m}\, n\,\langle x(t)^n\rangle + \frac{D}{\gamma^2}\, n(n-1)\,\langle x(t)^{n-2}\rangle \tag{5}$$

b) Résoudre l'équation (5) dans les cas $n = 1$ et $n = 2$. Déterminer le comportement des solutions aux grands temps. En supposant l'existence d'un état d'équilibre thermodynamique aux grands temps, *déduire* d'une des solutions obtenues une relation entre m, D, γ, k_B et T, où k_B est la constante de Boltzmann et T la température. Commenter.

c) Montrer que les moments centrés $M_n(t) = \langle[x - \langle x(t)\rangle]^n\rangle$ obéissent à l'équation :

$$\frac{d}{dt}M_n(t) = -\frac{k}{\gamma m}\ n\, M_n(t) + \frac{D}{\gamma^2}\, n(n-1)\, M_{n-2}(t) \tag{6}$$

d) *i)* Intégrer formellement l'équation (6) sur $M_n(t)$. Montrer alors que tous les moments centrés impairs $M_{2p+1}(t)$ s'annulent.

ii) Montrer, à partir de l'équation (6), que les moments pairs peuvent être choisis égaux à $M_{2p}(t) = C_p[M_2(t)]^p$ si l'on choisit les facteurs C_p de façon adéquate.

e) Vus les résultats qui précèdent on choisit pour $p(x,t)$ l'expression suivante :

$$p(x,t) = e^{-\frac{\Lambda(t)}{2}x^2 + \Delta(t)x + \Omega(t)} \tag{7}$$

Montrer que cette expression conduit à des équations différentielles couplées sur $\Lambda(t)$, $\Delta(t)$ et $\Omega(t)$.

f) Résoudre l'équation portant sur $\Lambda(t)$. Pour ce faire on pourra étudier l'équation portant sur $\Lambda^{-1}(t)$.

III - Diffusion avec ré-initialisation

On s'intéresse à une particule qui diffuse à une dimension avec un coefficient de diffusion D. On note $p(x,t|x_0)$ la probabilité que la particule se trouve en x à l'instant t sachant qu'elle est partie de x_0 à l'instant $t=0$.

a) Donner la distribution $p(x,t|x_0)$ dans ce cas d'une diffusion usuelle. On notera $p^0(x,t|x_0)$ cette distribution.

On suppose à présent que la particule est "ré-initialisée" de façon stochastique avec un taux r. Ceci veut dire qu'à tout instant la particule est remise arbitrairement à sa position initiale x_0 (quelque soit sa position atteinte au temps t), avec le taux r.

b) Justifier que, dans ce cas, $p(x,t|x_0)$ obéit à l'équation suivante :

$$\frac{\partial p(x,t|x_0)}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 p(x,t|x_0)}{\partial x^2} - r\,p(x,t|x_0) + r\,\delta(x-x_0) \tag{8}$$

avec la condition initiale $p(x,0|x_0) = \delta(x-x_0)$.

c) En considérant la transformée de Fourier de l'équation (8) déterminer la distribution de probabilité dans l'état stationnaire $p_{st}(x|x_0)$ dans le cas d'une diffusion ré-initialisée. Interpréter la longueur caractéristique qui apparaît dans cette distribution. On donne :

$$\tilde{p}(k,t) = \int \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}\,p(x,t)dx \qquad p(x,t) = \int \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}\,\tilde{p}(k,t)dk \qquad \delta(x-x') = \int \frac{e^{ik(x'-x)}}{2\pi}dk$$

On s'intéresse ensuite au temps de premier passage à l'origine sachant que la particule part toujours de $x_0 > 0$ au temps $t=0$. On introduit $Q(x,t)$, la probabilité de survie, c'est à dire la probabilité pour une particule *partie du point x au temps $t=0$ de ne pas avoir atteint l'origine jusqu'au temps t*. Cette quantité obéit à l'équation backward suivante :

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2} - rQ(x,t) + rQ(x_0,t), \tag{9}$$

avec $Q(0,t) = 0$ et $Q(x,0) = 1$.

d) Déterminer l'équation vérifiée par la transformée de Laplace temporelle :

$$q(x,s) = \int_0^\infty dt\,e^{-st}\;Q(x,t)$$

e) Résoudre cette équation en utilisant la condition $Q(0,t) = 0$ et montrer que l'on a :

$$q(x_0,s) = \frac{1-e^{-\alpha x_0}}{s + re^{-\alpha x_0}}$$

f) Donner l'expression formelle du temps de premier passage moyen l'origine $T(x_0)$ en fonction de la probabilité de survie $Q(x,t)$. Déduire des résultats précédents la forme explicite de ce temps $T(x_0)$.

g) Justifier qualitativement le fait que le temps $T(x_0)$ est fini pour $r > 0$ mais diverge lorsque $r \to 0$.