Université Pierre et Marie Curie

NP215 - Processus stochastiques

Année Universitaire 2012 – 2013

Examen

I - Bruit blanc et bruit coloré

A - Bruit blanc

On considère l'équation de Langevin en présence d'un bruit blanc :

$$\frac{dv}{dt} = -\gamma v + \Gamma(t) \tag{1}$$

avec $\langle \Gamma(t) \rangle = 0$ et $\langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle = 2D\,\delta(t - t')$.

1) Justifier l'appelation "bruit blanc" pour décrire cette situation.

2) Résoudre l'équation (1). On prendra la condition initiale $v(t = 0) = v_0$.

3) En déduire l'expression de la fonction de corrélation à deux points des vitesses : $\langle v(t_1)v(t_2) \rangle$. Montrer que, dans la limite des grands temps (à préciser), on a :

$$\langle v(t_1)v(t_2) \rangle = \frac{D}{\gamma}\, e^{-\gamma |t_1 - t_2|}$$

4) Déterminer la variance σ_v. Analyser cette quantité aux temps très courts, aux temps courts et aux temps longs. Interpréter ces résultats.

5) Montrer, en supposant qu'il y a équilibre thermodynamique d'une particule Brownienne de masse m avec un thermostat à la température T, que D peut être déterminé en fonction de γ, k, T et m.

B - Bruit "coloré"

On considère maintenant une équation de Langevin généralisée en présence d'un bruit *coloré* :

$$\frac{dv}{dt} = h(v) + \tilde{\Gamma}(t) \tag{2}$$

où h est une fonction quelconque de v, $\langle \tilde{\Gamma}(t) \rangle = 0$ et où la fonction de corrélation à deux points de $\tilde{\Gamma}(t)$ est donnée, dans la limite des grands temps, par :

$$\langle \tilde{\Gamma}(t)\tilde{\Gamma}(t') \rangle = \frac{D}{\gamma}\, e^{-\gamma |t - t'|} \tag{3}$$

1) Justifier le fait que le processus ainsi défini n'est plus Markovien.

2) On introduit une variable aléatoire additionnelle $\eta(t)$ telle que :

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= h(v) + \eta(t) \\ \frac{d\eta}{dt} &= -\gamma\eta(t) + \Gamma(t) \end{aligned} \tag{4}$$

où $\Gamma(t)$ est un bruit blanc : $\langle\Gamma(t)\rangle = 0$ et $\langle\Gamma(t)\Gamma(t')\rangle = 2D\,\delta(t-t')$.

a) Le processus joint $(v(t), \eta(t))$ donné par les équations (4) est-il, ou non, Markovien ? Justifier.

b) Montrer que le processus (4) est, *aux grands temps*, équivalent au processus défini par les équations (2) et (3). Commenter.

II - Cinétique d'un processus de croissance

On considère un processus de croissance de population. On note $n(t)$ le nombre d'individus de cette population à l'instant t. On suppose, de plus, que $n(t)$ est un processus stochastique Markovien à valeurs entières du type “processus de naissance et de mort ”, avec un taux de transition de l'état n vers l'état $n+1$:

$$g_n = \beta n$$

et un taux de transition de l'état n vers l'état $n-1$:

$$r_n = \alpha n.$$

On note enfin $p_n(t)$ la probabilité d'avoir n individus à l'instant t.

1) Schématiser les processus de transition entre l'état n et les états $n-1$ et $n+1$.

2) Ecrire l'équation maîtresse vérifiée par $p_n(t)$.

3) En déduire l'équation différentielle vérifiée par la valeur moyenne $\langle n(t)\rangle$ du nombre d'individus à l'instant t. La résoudre, avec la condition initiale $n(t=0) = n_0$. Commenter.

4) Dans question on cherche à calculer $p_0(t)$. Pour cela, on introduit la fonction génératrice :

$$G(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) z^n.$$

a) Comment $p_0(t)$ s'obtient-il à partir de $G(z,t)$?

b) Montrer que l'équation aux dérivées partielles du premier ordre vérifiée par $G(z,t)$ est donnée par :

$$\frac{\partial G(z,t)}{\partial t} - (\beta z^2 - (\alpha+\beta)z + \alpha)\frac{\partial G(z,t)}{\partial z} = 0 \tag{5}$$

avec la condition initiale : $G(z, t=0) = z^{n_0}$.

c) On résoud l'équation (5) ci-dessus par la méthode des caractéristiques. Montrer que l'équation aux caractéristiques, de caractéristique C, a comme solution :

$$\frac{z(t) - \dfrac{\alpha}{\beta}}{z(t)-1}\, e^{(\alpha-\beta)t} = C$$

d) Utiliser l'équation précédente pour déterminer l'expression de $z(t=0)$ en fonction de $z(t)$, pour *toute* valeur de z.

e) Quelle est l'équation vérifiée par $G(z,t) = G(s)$ le long d'une courbe caractéristique paramétrée par s ? Montrer alors que l'on a, en tenant compte de la condition initiale :

$$G(z,t) = [z(t=0)]^{n_0}$$

f) En utilisant les questions a), d) et e) montrer que :

$$p_0(t) = \left(\frac{\alpha - \alpha e^{(\alpha-\beta)t}}{\beta - \alpha e^{(\alpha-\beta)t}}\right)^{n_0}$$

Vérifier la cohérence de ce résultat avec la situation physique décrite, suivant les cas $\alpha > \beta$ et $\alpha < \beta$.

III - Modèle à trois états d'une enzyme

On considère d'abord une enzyme unique qui peut être trouvée dans trois différents états A, B or C. Les transitions entre ces différents états sont données par :

$$\mathrm{A} \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} \mathrm{B}$$

$$\mathrm{B} \underset{k_{-2}}{\overset{k_2}{\rightleftharpoons}} \mathrm{C}$$

$$\mathrm{C} \underset{k_{-3}}{\overset{k_3}{\rightleftharpoons}} \mathrm{A}$$

1) Ecrire les équations maîtresses pour les probabilités de trouver l'enzyme dans les états A, B, ou C au temps t, que l'on appellera respectivement $p_A(t)$, $p_B(t)$ and $p_C(t)$.

On considère maintenant un système fermé contenant un nombre total fixe N d'enzymes du type ci-dessus.

2) Ecrire l'équation maîtresse satisfaite par la probabilité $p_{n_A,n_B,n_C}(t)$ d'avoir n_A enzymes dans l'état A, n_B enzymes dans l'état B et n_C enzymes dans l'état C au temps

t (sans tenir compte de la contrainte $N = n_A + n_B + n_C$). On prendra bien soin de lister l'ensemble des situations conduisant, par les diverses transitions possibles, à la configuration (n_A, n_B, n_C).

3) Justifier, sans effectuer de calcul, que la solution de cette équation maîtresse doit être de la forme suivante :

$$p_{n_A,n_B,n_C}(t) = \frac{N!}{n_A!\,n_B!\,n_C!} p_A(t)^{n_A} p_B(t)^{n_B} p_C(t)^{n_C}. \tag{6}$$

4) Déduire de l'expression (6), la valeur moyenne et la variance des variables aléatoires n_i en fonction de $p_i(t)$ où $i = \{A, B, C\}$. Calculer aussi la covariance entre n_i et n_j.

5) On souhaite maintenant effectuer un calcul des fluctuations autour des concentrations moyennes des différentes espèces d'enzymes dans un développement dans la taille du système. On écrit donc :

$$n_i = \Omega\, C_i(t) + \sqrt{\Omega}\, \xi_i$$

où Ω est le volume du système, $C_i(t)$ est la concentration moyenne de l'espèce i, et ξ_i est une variable aléatoire qui décrit les fluctuations de la variable n_i, $i = \{A, B, C\}$.

On écrit alors la probabilité $p_{n_A,n_B,n_C}(t)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} p_{n_A,n_B,n_C}(t) &= p\left(\Omega\, C_A(t) + \sqrt{\Omega}\, \xi_A, \Omega\, C_B(t) + \sqrt{\Omega}\, \xi_B, \Omega\, C_C(t) + \sqrt{\Omega}\, \xi_C, t\right) \\ &= \Pi(\xi_A, \xi_B, \xi_C, t) \end{aligned}$$

a) Calculer $\partial\Pi(\xi_A, \xi_B, \xi_C, t)/\partial t$ en fonction de $\partial p_{n_A,n_B,n_C}(t)/\partial t$, des $\partial\Pi(\xi_A, \xi_B, \xi_C, t)/\partial\xi_i$ et des $\partial C_i(t)/\partial t$ avec $i = \{A, B, C\}$.

b) Déterminer les expressions, dans la limite de grand volume Ω et à l'ordre $1/\Omega$, des probabilités (par exemple : $p_{n_A+1,n_B-1,n_C}(t)$) intervenant dans l'équation maîtresse dérivée au **2)** en fonction des $\Pi(\xi_A, \xi_B, \xi_C, t)$ et de leurs dérivées premières et secondes par rapport aux ξ_i.

c) Déduire des questions précédentes le développement de l'équation maîtresse à l'ordre $\sqrt{\Omega}$ et montrer que l'on retrouve un résultat attendu.

6) Effectuer alors le développement à l'ordre suivant, Ω^0, et en déduire une équation de Fokker-Planck dans les variables ξ_A, ξ_B et ξ_C, qui approxime l'équation maîtresse initiale. Quel type de solution s'attend-on à avoir pour cette équation ?