Université Pierre et Marie Curie
Parcours MSA
Processus Stochastiques **Année 2013-2014**

TD N°2 : Lois continues et fonctions caractéristiques

I - Fonction caractéristique et moments

1- Calculer la fonction caractéristique des lois de probabilité suivantes :

a) Loi exponentielle, de densité $P_X(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}\, \theta(x)$.

b) Loi uniforme pour $|x| < a$, *i.e.*

$$P_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} & \text{si } |x| < a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

c) Loi gaussienne, de densité

$$P_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

d) Loi de Cauchy, de densité :

$$P_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{x^2 + a^2}\ .$$

2- En déduire les moments des distributions a), b) et c). Retrouver ces résultats par un calcul direct.

3- Que dire des moments de la loi de Cauchy ? Par quelle propriété de la fonction caractéristique ce dernier résultat se traduit-il ?

II - Changements de variables dans les lois de probabilité

1- On suppose que les diamètres d'une collection d'œufs sont distribués selon une loi gamma, de la forme :

$$P_X(x) = \frac{a^\nu}{\Gamma(\nu)}\, x^{\nu-1} e^{-ax}, \quad (a > 0,\ \nu > 0,\ 0 < x < \infty).$$

On suppose de plus que tous les œufs ont la même forme et que leur volume est donné par $Y = KX^3$. Donner la loi de Y.

2- Pour générer numériquement des variables aléatoires gaussiennes, on utilise couramment l'algorithme de Box-Muller qui repose sur le principe suivant : soient u, v des v.a. indépendantes, distribuées uniformément sur $[0, 1]$, alors les v.a. x et y définies par

$$x = \sqrt{-2\ln(u)}\cos(2\pi v),$$
$$y = \sqrt{-2\ln(u)}\sin(2\pi v),$$

sont des v.a. gaussiennes de moyenne zero et de variance unité. Démontrer ce résultat.

III - Comportement d'une somme de v.a. gaussiennes ou exponentielles

On considère un ensemble de n v.a. x_i, et on s'intéresse au comportement de la somme rescalée :

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

lorsque n est grand.

On suppose en outre que les v.a. x_i sont indépendantes, et distribuées suivant la même loi gaussienne

$$p(x_i = x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-(x_i-\mu)^2/(2\sigma^2)},$$

où μ et σ^2 représente respectivement la moyenne et la variance.

Montrer que le comportement de la somme pour n grand peut s'écrire sous la forme

$$p(S_n = s) \simeq e^{-nJ(s)}, \quad J(s) = \frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}.$$

1- Montrer qu'on a le même type de comportement pour $p(S_n = s)$ mais avec une fonction $J(s)$ différente qu'on déterminera pour une somme de v.a. distribuées selon une loi exponentielle

$$p(x_i = x) = \frac{1}{\mu} e^{-x_i/\mu}, \quad x_i > 0, \mu > 0.$$