Université Pierre et Marie Curie
Parcours MSA
Processus Stochastiques **Année 2013-2014**

**TD N°3 : Lois larges**

On considère comme au précédent TD un ensemble de $n$ v.a. $x_i$, et on s'intéresse au comportement de la somme rescalée :

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

lorsque $n$ est grand.

a) On suppose en outre que les v.a. $x_i$ sont indépendantes, et distribuées suivant la même loi de Cauchy. Calculer $p(S_n = s)$ comme au TD précédent. Que vaut dans ce cas la fonction $J(s)$ définie comme précedemment par $p(S_n = s) \simeq e^{-nJ(s)}$ pour $n$ grand ?

b) On suppose à présent plus généralement que la loi des v.a. $x_i$ est de la forme

$$p(x) \simeq x^{-(1+\mu)}, \tag{1}$$

pour $\mu > 0$ and $x$ grand et on s'intéresse à la somme des $x_i$ non-rescalée : $T_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Quelle est la valeur typique de $\langle T_n \rangle$ lorsque $0 < \mu < 1$ et de $\langle (T_n - \langle T_n \rangle)^2 \rangle$ lorsque $1 < \mu < 2$ ?

c) Applications : on s'intéresse à la diffusion d'une particule sur un ensemble de sites avec temps de pégeage, *i.e.*, sur chaque site la particule doit attendre un temps aléatoire obéissant à la loi de l'Eq. 1. Discuter les conditions dans lesquelles la diffusion de la particule est anormale.

d) Comme exemple illustrant la situation précédente, on considère la diffusion d'une particule sur un peigne à 1D où chaque dent du peigne représente un piège pour la particule au sens de la question précédente. On suppose que la longueur des dents du peigne est $L$. Justifier l'existence d'un régime de sous-diffusion lorsque $L \to \infty$ et d'un régime de diffusion normale avec un coefficient de diffusion $D \simeq 1/L$ lorsque $L$ est fini.