Université Pierre et Marie Curie
Parcours MSA
Processus Stochastiques **Année 2013 - 2014**

TD N°7 : Diffusion dans un intervalle ouvert

On considère une particule dont le déplacement à 1D est observé dans un intervalle $[0, L]$. Cette particule est brownienne et la distribution de probabilité $P(x, t|x_0, 0)$ qu'elle a de se trouver à l'instant t au point x sachant qu'elle est partie de x_0 au temps 0, obéit à une équation de diffusion avec un coefficient D. On arrête d'observer la particule dès qu'elle touche un des bords de l'intervalle en 0 ou en L.

1) Ecrire l'équation satisfaite par $P(x, t|x_0, 0)$ et préciser les conditions aux limites. Montrer que la solution de cette équation a la forme :

$$P(x,t|x_0,0) = \sum_{n\geq 1} a_n \sin(\frac{n\pi x}{L}) \exp\left(-\frac{Dn^2\pi^2 t}{L^2}\right). \tag{1}$$

2) Obtenir une expression des a_n sachant que au temps initial $P(x, 0|x_0, 0) = \delta(x - x_0)$.

3) On suppose que la position initiale de la particule, x_0 est une variable aléatoire distribuée uniforment dans l'intervalle $[0, L]$. Calculer la probabilité de trouver la particule à la position x à l'instant t, $G(x, t)$. En déduire la probabilité de survie, $P_{surv}(t)$, c'est à dire la probabilité de la trouver encore dans l'intervalle à l'instant t (quelque soit sa position initiale).

4) Déduire de la question précédente une expression de la distribution de temps de premier passage pour atteindre un des bords de l'intervalle. Calculer le temps de premier passage moyen au bout duquel la particule atteint un des bords pour la première fois.

5) Retrouver ce résultat en utilisant une équation de Fokker-Planck backward et en introduisant $\tilde{G}(x_0, t)$ la probabilité de survie à l'instant t sachant que la particule est partie de x_0 au temps 0.

On déduit des trajectoires observées de la particule un déplacement quadratique moyen par rapport à son point de départ $\langle \Delta x^2(t)\rangle_{cond}$, où la notation "cond" indique la contrainte liée à la "survie" de la particule dans l'intervalle jusqu'au temps t. Ecrire l'expression de cette quantité en fonction de $P(x, t|x_0, 0)$ et $P_{surv}(t)$.

b) Tracer $\langle \Delta x^2(t)\rangle_{cond}$ en fonction du temps et expliquer pourquoi cette quantité tend vers un plateau à temps long qu'on calculera.